Rechnerisch von der Durchschnitts- zur Momentangeschwindigkeit

Wenn man einen Stein zu Boden fallen lässt, dann wird die zurückgelegte Strecke (in Metern) näherungsweise durch $f(x) = 5x^2$ beschrieben. x ist die vergangene Zeit in Sekunden. Welche Momentangeschwindigkeit hat der Stein nach einer Sekunde?

Unsere Tabellenmethode liefert einen Näherungswert:

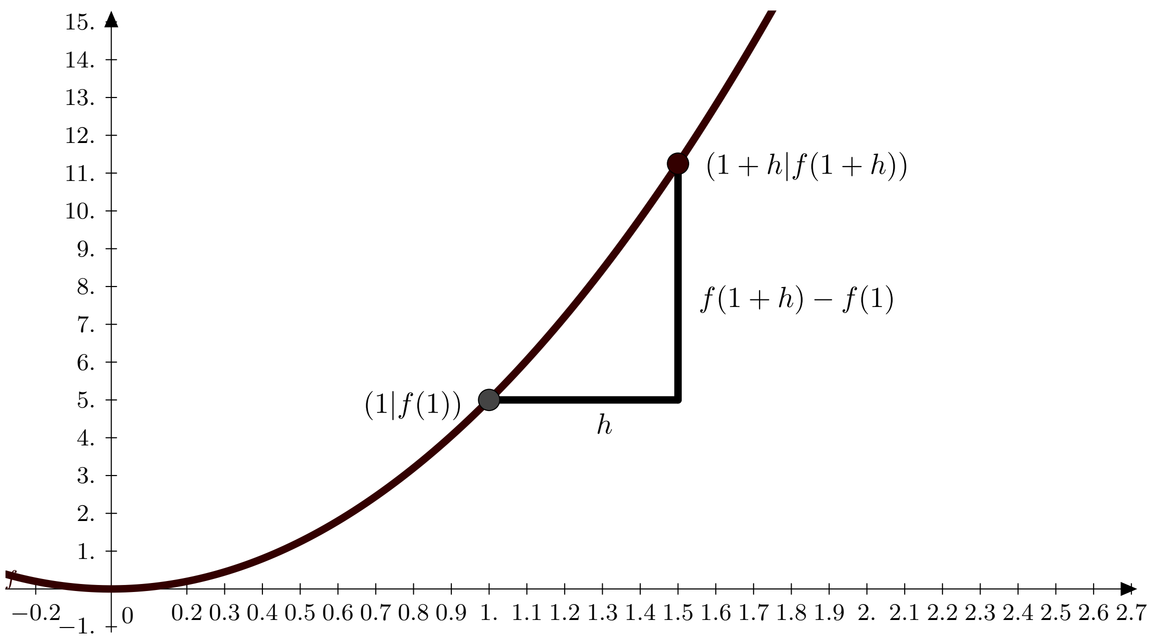
x_1	x_2	$x_2 - x_1$	$f(x_2)$	$f(x_1)$	$f(x_2) - f(x_1)$	$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$
0	1	1	5	0	5	5
0,9	1	0,1	5	4,05	0,95	9,5
0,99	1	0,01	5	4,9005	0,0995	9,95
0,999	1	0,001	5	4,990005	0,009995	9,995
3	1	-2	5	45	-40	20
2	1	-1	5	20	-15	15
1,1	1	-0,1	5	6,05	-1,05	10,5
1,01	1	-0,01	5	5,1005	-0,1005	10,05
1,001	1	-0,001	5	5,010005	-0,010005	10,005

Die Durchschnittgeschwindigkeiten scheinen sich dem Wert 10 immer mehr anzunähern.

Um diesen Wert auch rechnerisch zu erhalten, schreiben wir den Differenzenquotienten etwas anders auf. Weil wir den Abstand zwischen den beiden Zeitpunkten immer kleiner machen wollen, geben wir diesem Abstand zunächst einen Namen: h. Dieses h hat die Bedeutung der Messzeit, die möglichst kurz sein soll – in der Tabelle findet man h in der dritten Spalte. Wir wollen die Momentangeschwindigkeit an der Stelle $x_0 = 1$ ausrechnen. Die Zeichnung zeigt uns, dass die Steigung der Sekante auf dem Intervall $[1, 1+h]$ den Wert

$$m_{[1,1+h]} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

hat.



Wir berechnen zunächst den Zähler in einer Nebenrechnung (Erinnerung: $(1+h)^2 = 1+2h+h^2$):

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(1+h) & = & 5\cdot(1+h)^2 & = & 5 & + & 10h & + & 5h^2 \\
-f(1) & = & -5\cdot(1^2) & = & -5 & & & & \\
\hline
f(1+h)-f(1) & = & & & & & 10h & + & 5h^2
\end{array}$$

Damit erhalten wir:

$$m_{[1,1+h]} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{10h+5h^2}{h} = \frac{10h}{h} + \frac{5h^2}{h} = 10+5h\ .$$

Der Ausdruck $10+5h$ nähert sich dem Wert 10 tatsächlich beliebig genau an, wenn man h immer kleiner wählt. 10 heißt dann Grenzwert von $10+5h$ für $h \to 0$. Man schreibt

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} 10+5h = 10\ .$$

Man nennt $f'(1)$ die **Ableitung von f an der Stelle 1**.

Aufgabe: Wende die hier durchgeführte Methode auf die Funktion $f(x) = -0.1x^2 + 2x$ an der Stelle $x_0 = 3$ an (Ergebnis: $f'(3) = 1.4$). Überprüfe dieses Ergebnis auch nochmal mit dem GTR (Graph anzeigen lassen, $\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{\text{DRAW}}$, $\boxed{5}$, $\boxed{3}$, $\boxed{\text{ENTER}}$).