Normierung der Normalverteilung

Problem

$f(x) = k \cdot e^{-x^2}$ soll eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$ sein, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,.$$

Welchen Wert muss k annehmen?

Problem

$f(x) = k \cdot e^{-x^2}$ soll eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$ sein, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,.$$

Welchen Wert muss k annehmen?

$f(x) = k \cdot e^{-x^2}$ hat **keine** elementare Stammfunktion.

Trick

Wenn $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-x^2} dx = 1$ gilt, dann nach Umbennenung der Variable auch $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-y^2} dy = 1$.

Trick

Wenn $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-x^2} dx = 1$ gilt, dann nach Umbennenung der Variable auch $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-y^2} dy = 1$.

Also: $\left(\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-y^2} dy\right) = 1$

Trick

Wenn $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-x^2} dx = 1$ gilt, dann nach Umbennenung der Variable auch $\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-y^2} dy = 1$.

Also: $\left(\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-y^2} dy\right) = 1$

Umschreiben: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = 1$

Was bedeutet das?

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = 1:$$

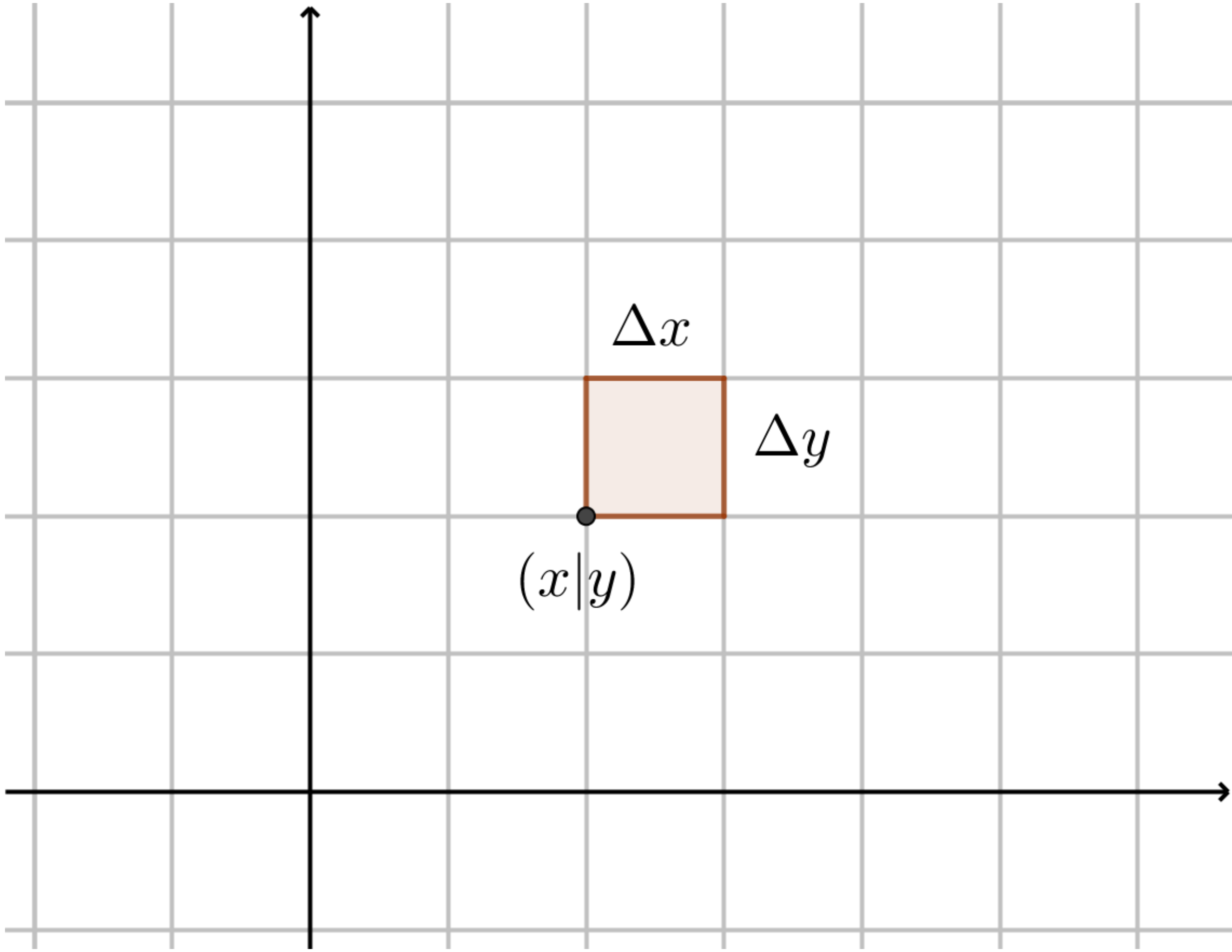
Hier wird eine Funktion, deren Wert von den **beiden** Koordinaten eines Punktes P(x|y) abhängt, über $\mathbb{R}^2$ integriert.

Was bedeutet das?

Grundidee der Integralrechnung für „kleine“ Quadrate $\Delta x \Delta y$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy$$

$$\approx \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} f(k\Delta x, l\Delta y)\Delta x\Delta y$$



Symmetrie nutzen

Beobachtung:

Der Integrand $e^{-(x^2+y^2)}$ hängt **nur** vom Quadrat des Abstands zwischen dem Ursprung und $P(x|y)$ ab!

Satz des Pythagoras: $d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}$

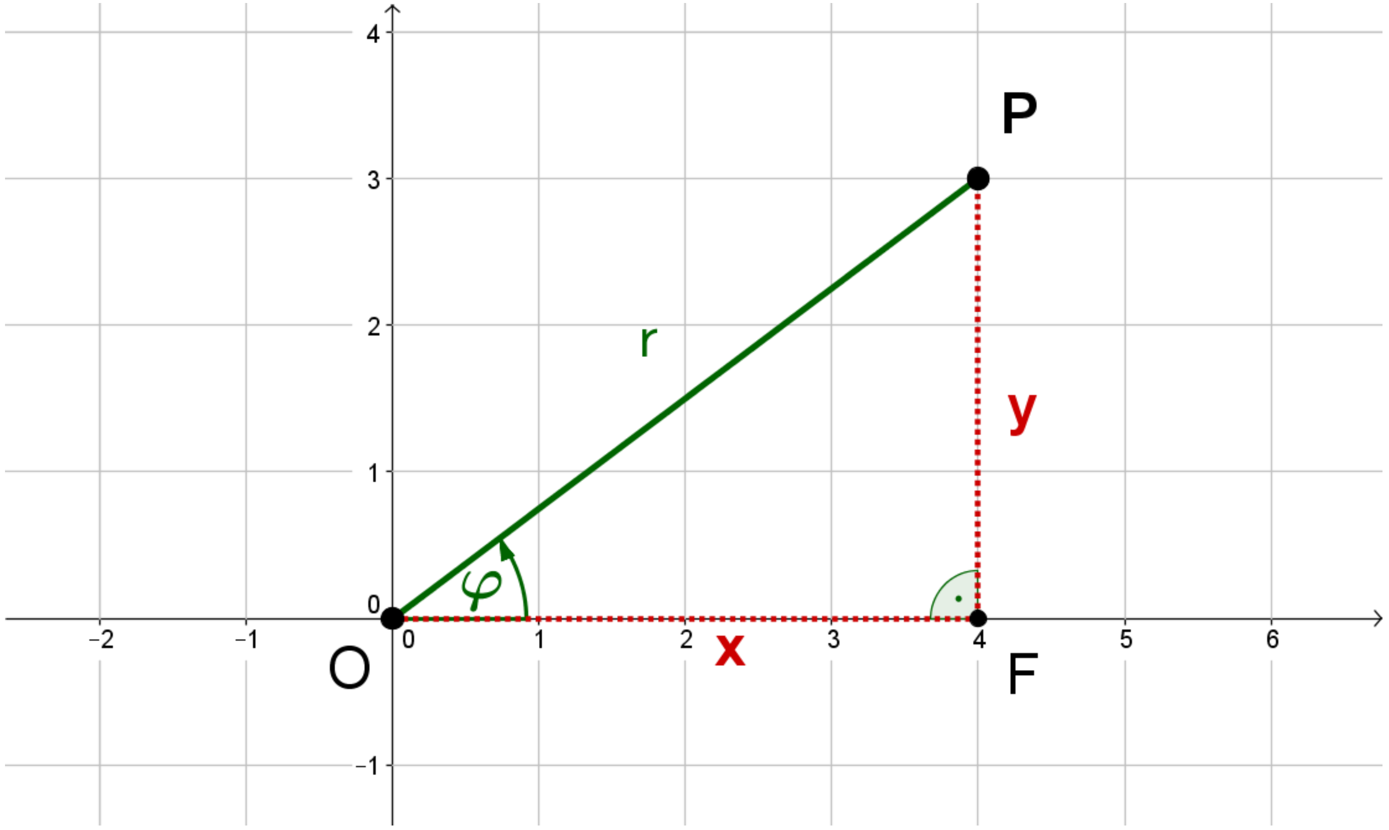
Polarkoordinaten

Verwende für die Integration Polarkoordinaten:

$$(x, y) \to (r, \varphi)$$

mit

$$x = r\cos(\varphi)\,, y = r\sin(\varphi)$$



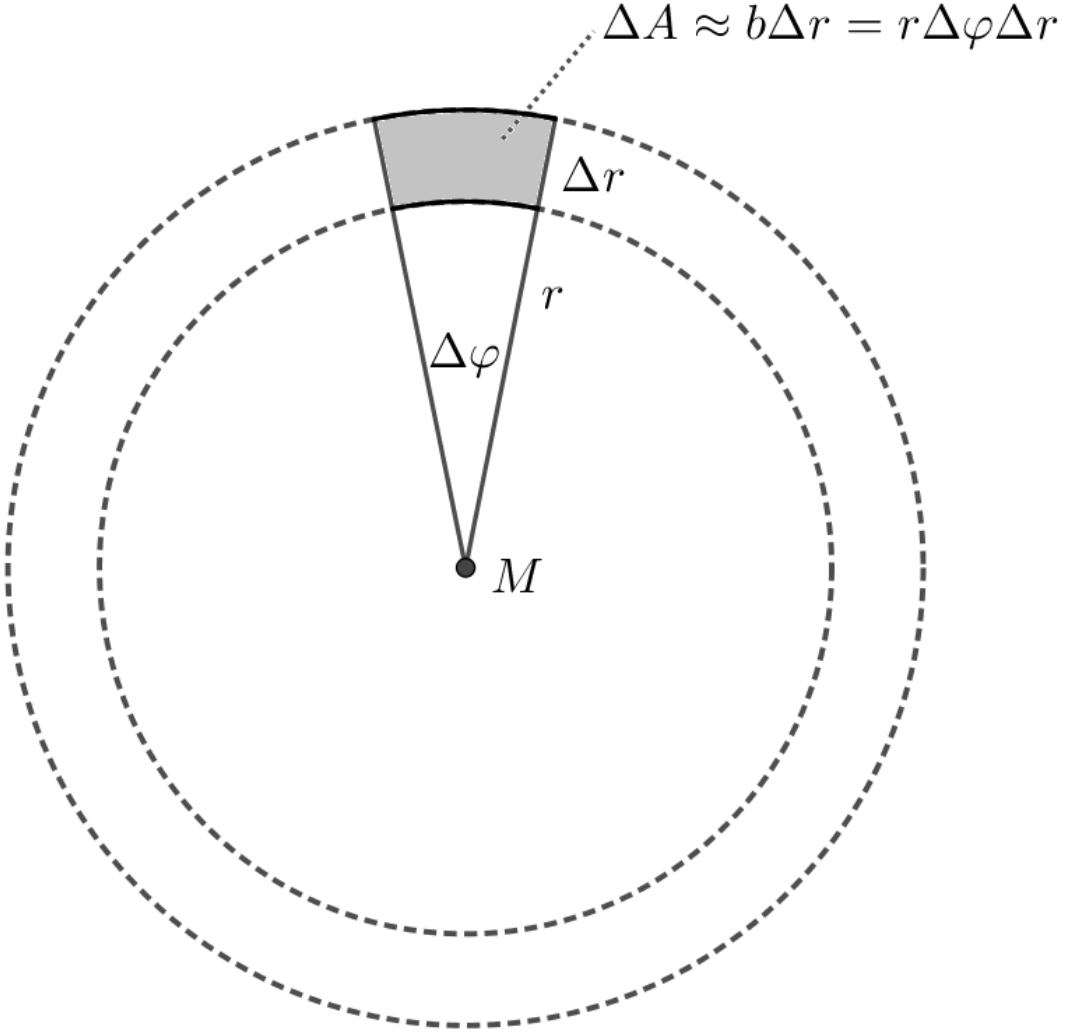
Polarkoordinaten

Integriert wird nun über Kreissegmente:

$$r\Delta\varphi\Delta r$$

statt

$$\Delta x\Delta y$$



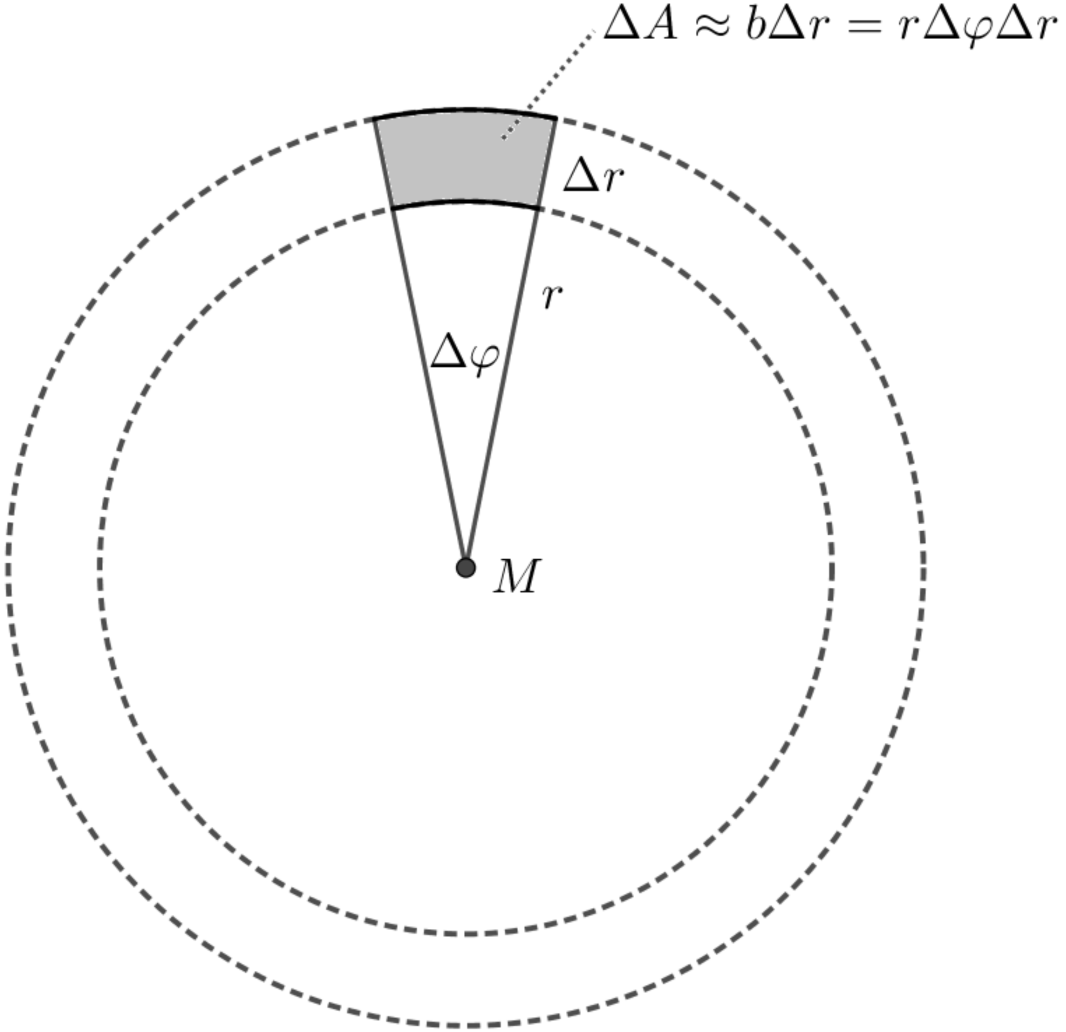
Polarkoordinaten

Test: Kreisfläche berechnen

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} r d\varphi dr$$

$$= 2\pi \int_0^R r dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} R^2 = \pi R^2$$



Integration durchführen

Erinnerung: $x^2 + y^2 = r^2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} r k^2 e^{-r^2} d\varphi dr$$

Integration durchführen

Erinnerung: $x^2 + y^2 = r^2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} rk^2 e^{-r^2} d\varphi dr$$

$$= 2\pi k^2 \int_{0}^{\infty} re^{-r^2} dr$$

Integration durchführen

Berechne $2\pi k^2 \int_0^\infty r e^{-r^2} dr$.

Integration durchführen

Berechne $2\pi k^2 \int_0^\infty re^{-r^2}dr$.

Substitution: $v = -r^2 \Rightarrow -\frac{dv}{2r} = dr$

$$\int re^{-r^2}dr = -\int re^v \frac{dv}{2r} = -\frac{1}{2}\int e^v dv = -\frac{1}{2}e^v = -\frac{1}{2}e^{-r^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty re^{-r^2}dr = \frac{1}{2}$$

Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \pi k^2$$

Also:

$$k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Ergebnis

Wenn man nun noch den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ vorgibt, ergibt sich für die Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung

$$\varphi_{n,k}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$