Differenzierbarkeit und lineare Approximation

Aus der Einführungsphase wissen wir, dass die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt $\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$ angibt. Sie ist definiert durch

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Wir lernen nun eine zweite Charakterisierung der Ableitung kennen, die herausarbeitet, was es bedeutet, dass die „Tangente sich an den Graphen der Funktion anschmiegt". Dazu arbeiten wir mit der Beispielfunktion f mit $f(x) = x^2$.

a) Berechne die Gleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = 1$.
b) Zeige allgemein, dass für f mit $f(x) = x^2$ die Gleichung der Tangente an der Stelle x_0 gegeben ist durch $t(x) = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$.

Im Folgenden geben wir vor, diese Definition nicht zu kennen. Wir suchen zunächst exemplarisch nach derjenigen Geraden, die im Punkt (1|1) den Graphen von f am besten approximiert (=annähert). Es ist klar, dass diese Gerade g durch den Punkt (1|1) verlaufen muss.

c) Begründe, dass die Gleichung einer Geraden durch diesen Punkt gegeben ist durch $g(x) = m(x - 1) + 1$.

Wir suchen nun diejenige Geradensteigung m, für die auch in der Nähe der Stelle $x_0 = 1$ die Werte von $f(x)$ möglichst gut mit denen von $g(x)$ übereinstimmen. Wir schreiben dazu $x = 1 + h$ für Werte von h, die deutlich kleiner sind als 1.

d) Berechne die Differenz $f(1 + h) - g(1 + h)$, die den Unterschied zwischen den Werten der Funktion und ihrer Approximation durch die lineare Funktion g angibt.
Hinweis: Wenn Du richtig gerechnet hast, dann kommen im Ergebnis nur Summanden vor, die den Faktor h oder h^2 enthalten.
e) Begründe nun, dass für den bekannten Wert $m = 2$ die Funktionswerte von f in der Nähe von $x = 1$ am besten durch g approximiert werden.
f) Zeige nun, dass sich aus dieser Überlegung allgemein die Tangentengleich aus b) ergibt, d.h. wiederhole die Rechnung für $g(x) = m(x - x_0) + x_0^2$ und die Differenz $f(x_0 + h) - g(x_0 + h)$.

Lösungen

a) $t(x) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$

b) $t(x) = m(x - x_0) + f(x_0) = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$

c) Die Funktion ist linear mit g(1)=1

d) $f(1+h) - g(1+h) = (1+h)^2 - mh - 1 = (2-m)h + h^2$

e) Für m=2 verschwindet der in h lineare Term, und der Fehler wächst nur quadratisch.

f) $f(x_0 + h) - g(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 - mh - x_0^2 = (2x_0 - m)h + h^2$
Also: $m = 2x_0$