Liebe Schülerinnen und Schüler,

leider bin ich erkrankt und möchte niemanden anstecken. Kümmert euch in meiner Abwesenheit bitte um Folgendes:

- Abgleich der Aufgaben von Donnerstag mit der Musterlösung (siehe unten)
- Durcharbeiten des Textes zur „Variation der Konstanten“ (siehe unten)
- Anwendung des Verfahrens. Dazu gibt es auf dem DGL-Übungsblatt einen eigenen Block. Teilaufgabe c) entfällt, weil sie zu viele euch unbekannte trigonometrische Identitäten voraussetzt.
- Schickt mir bitte bis Mittwoch per Mail Fragen zu den Wiederholungsaufgaben (hilfsmittelfreier Teil, 2018). Ich werde am Mittwoch auch entscheiden, ob ich am Donnerstag zur Schule komme, damit niemand umsonst zur ersten Stunde kommen muss. Die Antworten auf die gestellten Fragen kommen in diesem Fall auf die Website.

Euer
Daniel Wieczorek

**Musterlösungen: Trennbare DGLs**

a) $y' = \frac{1}{2y}$ "$\Rightarrow$" $2ydy = dx \Rightarrow y^2 = x + c \Rightarrow y = \pm\sqrt{x+c},\ y(0) = \pm\sqrt{c} = 2 \Rightarrow$
$y(x) = \sqrt{x+4}$

b) $y' = y^2$ "$\Rightarrow$" $\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + c \Rightarrow y = -\frac{1}{x+c}, y(0) = -\frac{1}{c} = -1 \Rightarrow c = 1$

c) $y' = \frac{x}{y}$ "$\Rightarrow$" $ydy = xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2+2c}, y(0) = \pm\sqrt{2c} = 1 \Rightarrow$
$y(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}$

d) $y' = -\frac{x}{y}$ "$\Rightarrow$" $ydy = -xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow y = \pm\sqrt{2c - x^2},\ y(0) = \pm\sqrt{2c} = 4 \Rightarrow$
$y(x) = \sqrt{16 - x^2}$

e) $y' = \frac{y^2}{x^2}$ "$\Rightarrow$" $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + c \Rightarrow y = \frac{x}{1+cx},\ y(2) = \frac{2}{1+2c} = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{x}{1+\frac{1}{2}x}$

$$y' = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + c \Rightarrow y = \tilde{c}e^{x^2}, y(1) = \tilde{c}e = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{e}e^{x^2}$$

**Variation der Konstanten**

Bislang haben wir trennbare Differentialgleichungen betrachtet, etwa $y' - xy = 0$ mit Lösung $y(x) = ce^{\frac{1}{2}x^2}$. Allgemein haben diese Differentialgleichungen die Form $y' - f(x)g(y) = 0$ und können (formal) folgendermaßen getrennt werden: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.

Dieses Verfahren lässt sich erweitern: Als Beispiel betrachten wir $y' - xy = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Im Gegensatz zur ursprünglichen DGL steht auf der rechten Seite noch ein Ausdruck der Form $h(x)$. Wir setzen zunächst $h(x) = 0$, lösen die DGL wie oben und nehmen dann an, dass die Konstante c in $y(x) = ce^{\frac{1}{2}x^2}$ nun eine Funktion ist, die von der Variable $x$ abhängt: $y(x) = c(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$.
Dieser Trick motiviert den Namen des Verfahrens.

Wir nutzen die Produktregel, um diesen Ansatz in die vollständige DGL einzusetzen:

$$\begin{aligned} c'e^{\frac{1}{2}x^2} + cxe^{\frac{1}{2}x^2} - xce^{\frac{1}{2}x^2} &= e^{\frac{1}{2}x^2} \\ c'e^{\frac{1}{2}x^2} &= e^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

und damit $c' = 1 \Rightarrow c(x) = x + \tilde{c}$, wobei $\tilde{c}$ eine Integrationskonstante ist (die Tilde über c dient nur dazu, Doppelbezeichnungen zu vermeiden).

Die Lösung der vollständigen DGL ist dann $y(x) = (x + \tilde{c})e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Zusammenfassung:

- Löse die homogene DGL $y' - f(x)g(y) = 0$ durch Trennung der Variablen.
- Nimm in der Lösung an, dass die Konstante $c$ eine Funktion ist, die von $x$ abhängt.
- Setze den Ansatz in die vollständige DGL ein und berechne $c(x)$.
- Notiere die vollständige Lösung.