Die formale Bedeutung des Ausdrucks $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Im Unterricht wurde die Frage aufgeworfen, was die formale Bedeutung des Grenzwerts für $x \to \infty$ sei. Das anschauliche Vorgehen lässt sich wie folgt formalisieren:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ist gleichbedeutend mit: Für jede (noch) so große positive Zahl S gibt es eine Stelle x_0, sodass für alle Stellen x mit der Eigenschaft $x > x_0$ gilt: $f(x) > S$.

Für Potenzfunktionen mit Gleichung $f(x) = ax^n$ (hier $a > 0$) lässt sich die entsprechende Stelle x_0 sogar angeben, indem man eine Gleichung löst:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= S \\ ax_0^n &= S \\ \Leftrightarrow \qquad x_0 &= \sqrt[n]{\frac{S}{a}} \end{aligned}$$

Konkreter: Wenn man z.B. für $f(x) = x^4$ die Schranke $S = 10000$ vorgibt, so erhält man $x_0 = 10$. Für alle Stellen $x > 10$ sind die Funktionswerte größer als 10000. Man kann dieses Verfahren für *jede beliebige Schranke S* durchführen, sodass gilt $\lim_{x\to\infty} x^4 = \infty$.

Hierbei musste man allerdings noch voraussetzen, dass diese Funktion die Eigenschaft hat, dass für $x > 0$ ihre Funktionswerte zunehmen, wenn man man x vergrößert.

Auch den Beweis für den Satz „bei ganzrationalen Funktionen bestimmt der Summand mit dem höchsten Exponenten das Verhalten für sehr große x“ erhält man nicht gratis: Zusätzlich zu der Umformung aus dem Unterricht

$$3x^3 - 2x^2 + 3 = 3x^3\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

muss man beweisen, dass der eingeklammerte Term für $x \to \infty$ tatsächlich den Grenzwert 1 besitzt[1], und dass es weiterhin Grenzwert-Rechenregeln der Form "$\infty \cdot 1 = \infty$" gibt.

[1] Und auch die Bedeutung von „der Term hat den Grenzwert 1“ muss man zunächst festlegen! Eine Funktion f hat für $x \to \infty$ den Grenzwert a, wenn für jedes (noch so kleine) $\epsilon > 0$ ein x_0 existiert, sodass für alle $x > x_0$ gilt: $|f(x) - a| < \epsilon$. Man schreibt $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.