Angeleitetes Üben: Berechnen der Ableitung an einer Stelle mit der „h-Methode“

Vorwissen: einfache Termumformungen (Distributivgesetz, bin. Formeln), Differenzenquotient

Beispiel

Für die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x$ soll an der Stelle $x_0 = 4$ die Ableitung mit der „h-Methode“ berechnet werden.

1. Berechne $f(4+h) = -(4+h)^2 + 2 \cdot (4+h) = -(16 + 8h + h^2) + 8 + 2h$
   $= -16 - 8h - h^2 + 8 + 2h$

2. Berechne $-f(4) = -(-4^2 + 2 \cdot 4) = 16 - 8$

3. Berechne mit Hilfe von 1. und 2. $f(4+h) - f(4)$:

   $$\begin{array}{lll} f(4+h) & = -16 - 8h - h^2 + 8 + 2h & \\ -f(4) & = +16 \qquad\qquad - 8 & \\ \hline f(4+h) - f(4) & = \qquad -8h - h^2 \qquad + 2h & = -6h - h^2 \end{array}$$

   Selbstkontrolle: Man erkennt, dass man richtig gerechnet hat, wenn im Ergebnis keine Summanden ohne h mehr vorkommen.

   Hinweis: Dieses Schema dient als Hilfe für diejenigen, die Probleme mit Termumformungen haben. Natürlich kann $f(4+h) - f(4)$ auch direkt berechnet werden.

4. Berechne mit Hilfe von 3. den Differenzenquotient $\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$:
   $\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = -6 - h$
   Hinweis: Im Ergebnis von 3. fällt jedes einzelne h weg, aus h^2 wird h, aus h^3 wird h^2 …

5. Berechne den Grenzwert für $h \to 0$:
   $\lim\limits_{h \to 0}(-6 - h) = -6$, also $f'(4) = -6$.

   Selbstkontrolle: Mit dem GTR die Tangente an der Stelle 4 einzeichnen und die Steigung ablesen.

Hilfe Stufe 1

Für die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x$ soll an der Stelle $x_0 = -3$ die Ableitung mit der „h-Methode“ berechnet werden (Kontrollergebnis: f‘(-3)=8) .

1. Berechne $f(-3+h) = -(-3+h)^2 + 2 \cdot (-3+h) = -9 + 6h - h^2 - 6 + 2h$

2. Berechne $-f(-3) = -\left(-(-3)^2 + 2 \cdot (-3)\right) = 9 + 6$

3. Berechne mit Hilfe von 1. und 2. $f(-3+h)-f(-3)$:

$f(-3+h)$	$= -9+6h-h^2-6+2h$
$-f(-3)$	$= \ \ 9 \qquad\qquad +6$
$f(-3+h)-f(-3)$	$=$

4. Berechne mit Hilfe von 3. den Differenzenquotient $\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$:
$\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} =$

5. Berechne den Grenzwert für $h \to 0$:

Hilfe Stufe 2

Für die Funktion f mit $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ soll an der Stelle $x_0 = 2$ die Ableitung mit der „h-Methode" berechnet werden (Kontrollergebnis: f'(2)=6).

1. Berechne $f(2+h) = 3 \cdot (2+h)^2 - 6 \cdot (2+h) + 1 =$

2. Berechne $-f(2) = -(3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 1) =$

3. Berechne mit Hilfe von 1. und 2. $f(2+h) - f(2)$:

$f(2+h)$	$=$
$-f(2)$	$=$
$f(2+h)-f(2)$	$=$

4.

5.

Aufgaben:

a) $f(x) = -x^2 + 4x,\ x_0 = -1$
b) $f(x) = 5x^2 + 2x + 3, x_0 = 0$
c) $f(x) = -3x^2 - x,\ x_0 = 2$